مفاهيم الرياضيات البحتة

الجبر والهندسة التحليلية الفراغية

الصف الثالث الثانوى

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

أولا : الجبـــــــر

الوحدة الاولي : التباديل و التوافيق ونظرية ذات الحدين

(١) $ل^{ن}_{ر} = ن(ن-١)(ن-٢)$ ..... $(ن-ر+١)$ لكل $ر \leq ن$ ، $ر$ ، $ن \in ص^{+}$

(٢) $ل^{ن}_{ر} = \frac{\lfloor ن}{\lfloor ن-ر}$ (٣) $\lfloor ١ = \lfloor ٠ = ١$

(٤) $ق^{ن}_{ر} = \frac{ل^{ن}_{ر}}{\lfloor ر} = \frac{\lfloor ن}{\lfloor ر \ \lfloor ن-ر}$ (٥) $ق^{ن}_{ن} = ق^{ن}_{٠} = ١$

(٦) $ق^{ن}_{ر} = ق^{ن}_{ن-ر}$ (٧) إذا كان $ق^{ن}_{س} = ق^{ن}_{ص}$ فإن $س = ص$ أ، $س + ص = ن$

(٨) $\frac{ق^{ن}_{ر}}{ق^{ن}_{ر-١}} = \frac{ن-ر+١}{ر}$ (٩) $ق^{ن}_{ر} + ق^{ن}_{ر-١} = ق^{ن+١}_{ر}$

(١٠) $(س+أ)^{ن} = س^{ن} + ق^{ن}_{١} س^{ن-١} أ + ق^{ن}_{٢} س^{ن-٢} أ^{٢} + ... + أ^{ن}$

$(س-أ)^{ن} = س^{ن} - ق^{ن}_{١} س^{ن-١} أ + ق^{ن}_{٢} س^{ن-٢} أ^{٢} - ..... + (-أ)^{ن}$

(١١) $(س+أ)^{ن} + (س-أ)^{ن} = ٢$ [مجموع الحدود الفردية الرتبة من حدود $(س+أ)^{ن}$]

(١٢) $(س+أ)^{ن} - (س-أ)^{ن} = ٢$ [مجموع الحدود الزوجية الرتبة من حدود $(س+أ)^{ن}$]

(١٣) $(١ \pm س)^{ن} = ١ \pm ق^{ن}_{١} س + ق^{ن}_{٢} س^{٢} \pm ق^{ن}_{٣} س^{٣} + ... (\pm س)^{ن}$

(١٤) الحد العام في مفكوك $(س+أ)^{ن}$ هو $ح_{ر+١} = ق^{ن}_{ر} س^{ن-ر} أ^{ر}$

الحد الأوسط في مفكوك $(س+أ)^{ن}$

- إذا كانت ن فردية يوجد حدان أوسطان رتبتاهما : $\frac{ن+١}{٢}$ ، $\frac{ن+٣}{٢}$
- إذا كانت ن زوجيه يوجد حد أوسط وحيد رتبته : $\frac{ن+٢}{٢}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

(١٥) النسبة بين حدين متتاليين من مفكوك ذات الحدين $(س + ا)^{ن}$ $= \frac{ع_{ر+١}}{ع_{ر}} = \frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{ا}{س}$

(١٦) النسبة بين معاملي حدين متتاليين من مفكوك ذات الحدين $(س + ا)^{ن}$

$$= \frac{\text{معامل الثاني}}{\text{معامل الاول}} \times \frac{ن - ر + ١}{ر}$$

الوحدة الثانية : الأعداد المركبة

العدد المركب : لكل س ، ص ∈ ح فإن العدد ع = س + ص ت يسمي عدداً مركباً الجزء الحقيقي له هو س ، و الجزء التخيلي له هو ص حيث $ت^{٢} = -١$

مرافق العدد المركب : إذا كان ع = س + ص ت عدداً مركباً فإن مرافقه هو $\overline{ع}$ = س – ص ت

و يكون ع + $\overline{ع}$ = عدداً حقيقيا ، ع $\overline{ع}$ = عدداً حقيقيا

خواص المرافق : (١) $\overline{(ع_{١} + ع_{٢})} = \overline{ع_{١}} + \overline{ع_{٢}}$

(٢) $\overline{(ع_{١} \, ع_{٢})} = (\overline{ع_{١}})(\overline{ع_{٢}})$

(٣) $\left(\frac{\overline{ع_{١}}}{\overline{ع_{٢}}}\right) = \overline{\left(\frac{ع_{١}}{ع_{٢}}\right)}$

التمثيل الهندسى للعدد المركب : العدد المركب ع = س + ص ت تمثله النقطة (س ، ص) في المستوي الاحداثي لأرجاند

المقياس و السعة للعدد المركب : إذا كانت النقطة (س ، ص) تمثل العدد المركب ع على مستوي أرجاند

فإن $|ع| = \sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$ ، سعة ع تتعين من العلاقتين جتا $\theta = \frac{س}{ل}$ ، جا $\theta = \frac{ص}{ل}$

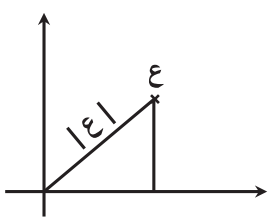
خواص المقياس و السعة للعدد المركب :

(١) $|ع| = |\overline{ع}|$ (٢) $ع \, \overline{ع} = |ع|^{٢} = |\overline{ع}|^{٢}$

(٣) $|ع_{١} \, ع_{٢}| = |ع_{١}| \, |ع_{٢}|$

(٤) $\left|\frac{ع_{١}}{ع_{٢}}\right| = \frac{|ع_{١}|}{|ع_{٢}|}$

(٥) $|ع_{١} + ع_{٢}| \leq |ع_{١}| + |ع_{٢}|$



(٦) سعة العدد المركب يمكن أن تأخذ عددا غير منته من القيم التي تختلف كل منها عن الأخرى بعدد صحيح من مضاعفات ٢ π

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

(٧) السعة التي تنتمي للفترة] – π ، π] تسمى السعة الأساسية للعدد المركب

(٨) سعة $\overline{ع}$ = – سعة ع

(٩) سعة (– ع) = – π + سعة ع (١٠) سعة $\frac{١}{ع}$ = – سعة ع

الصورة المثلثية للعدد المركب : ع = ل (جتا θ + ت جا θ) حيث ع = | ل | ، θ السعة الأساسية

ضرب و قسمة الاعداد المركبة بالصورة المثلثية :

إذا كان : $ع_١ = ل_١$ (جتا $\theta_١$ + ت جا $\theta_١$) ، $ع_٢ = ل_٢$ (جتا $\theta_٢$ + ت جا $\theta_٢$)

فإن : $ع_١ ع_٢ = ل_١ ل_٢$ (جتا ($\theta_١ + \theta_٢$) + ت جا ($\theta_١ + \theta_٢$))

، $\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{ل_١}{ل_٢}$ (جتا ($\theta_١ - \theta_٢$) + ت جا ($\theta_١ - \theta_٢$))

الصورة الاسية للعدد المركب : (صورة أويلر) إذا كان ع عددا مركبا مقياسه ل ، و سعته الأساسية θ فإن :

ع = ل $هـ^{\theta ت}$ حيث θ بالتقدير الدائري

$هـ^{\theta ت}$ = جتا θ + ت جا θ ، $هـ^{-\theta ت}$ = جتا θ – ت جا θ = جتا(– θ) + ت جا (– θ)

نظرية ديموافر : إذا كان ن عدداً صحيحا فإن :

(١) (جتا θ + ت جا θ)^{ن} = (جتا ن θ + ت جا ن θ)

(٢) إذا كان ك عددا موجبا فإن (جتا θ + ت جا θ)$^{\frac{١}{ك}}$ = (جتا $\frac{\theta + ٢\pi ر}{ك}$ + ت جا $\frac{\theta + ٢\pi ر}{ك}$)

أي أن مقدار (جتا θ + ت جا θ)$^{\frac{١}{ك}}$ يأخذ قيما متعددة تبعا لقيم ر و يكون عدد هذه القيم المختلفة يساوي ك

من القيم التي نحصل عليها بوضع ر = ... ، – ٢ ، – ١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ..... التي تجعل السعة $\frac{\theta + ٢\pi ر}{ك}$

محصورة بين – π ، π

الجذور التكعيبية للواحد الصحيح : إذا كان $ع^٣ = ١$ فإن ع ∈ { ١ ، $-\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت ، $-\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت }

و يرمز لهذه الجذور بالرموز ١ ، ω ، $\omega^٢$

حيث $\omega = -\frac{١}{٢} \pm \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت ، $\omega^٢ = -\frac{١}{٢} \mp \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح :

(١) $\omega^٣ = ١$ (٢) $\omega^٢ + \omega + ١$ = صفر (٣) $\omega - \omega^٢ = \pm \sqrt{٣}$ ت

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

الجذور النونية للواحد الصحيح : إذا كان $ع^{ن} = ١$

فإن $ع = (جتا ٠^{\circ} + ت جا ٠^{\circ})^{\frac{١}{ن}} = جتا \frac{٢ \pi ك}{ن} + ت جا \frac{٢ \pi ك}{ن}$ حيث $ك \ni ص$ ، $\pi ، \pi - [\ni \frac{٢ \pi ك}{ن}]$

و تمثل الجذور النونية للواحد الصحيح على المستوي أرجاند برؤوس مضلع عدد رؤوسه ن ، و تقع على دائرة مركزها نقطة الأصل و طول نصف قطرها ١

الوحدة الثالثة : المحددات و المصفوفات

المحدد : المحدد من الرتبة ن يتكون من ن من الصفوف ، ن من الأعمدة و ينشأ من حذف (ن – ١) من المتغيرات في ن من المعادلات الخطية .

خواص المحددات :

- لا تتغير قيمة المحدد إذا تبدلت الصفوف بالأعمدة و الأعمدة بالصفوف بنفس ترتيبها
- قيمة المحدد لا تتغير بفكه عن طريق عناصر أي صف (عمود)
- إذا وجد عامل مشترك في جميع عناصر صف (عمود) في محدد فإن هذا العامل يمكن أخذه خارج المحدد
- قيمة المحدد تساوي صفر في الحالات الأتية :
  - إذا كانت جميع عناصر أي صف أو (أي عمود) في محدد تساوي صفر فإن قيمة المحدد = صفر
  - إذا تساوت العناصر المتناظرة في أي صفين (أو عمودين) في محدد فإن قيمة المحدد = صفر
- إذا بدلنا موضعي صفين (عمودين) فإن قيمة المحدد الناتج = – ١ × قيمة المحدد الأصلي
- إذا كتبت جميع عناصر أي صف (عمود) كمجموع عنصرين فإنه يمكن كتابة المحدد الأصلي على صورة مجموع محددين
- إذا أضفنا لعناصر أي صف (عمود) العناصر المناظرة لها من صف (عمود) أخر مضروبة في عدد مثل م فإن قيمة المحدد لا تتغير
- قيمة المحدد على الصورة المثلثة تساوي حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي
- في أي محدد إذا ضربنا عناصر أي صف (عمود) في العوامل المرافقة للعناصر المناظرة في أي صف (عمود) أخر ثم جمعنا نواتج الضرب فإن الناتج يكون مساوياً صفرا

لإيجاد معكوس المصفوفة المربعة : من النظم ٣ × ٣ باستخدام مصفوفة العوامل المرافقة نتبع الخطوات التالية :

- نوجد محدد المصفوفة أ مع ملاحظة أن | أ | ≠ صفر
- نكون مصفوفة العوامل المرافقة لكل عنصر من عناصر المصفوفة أ
- نوجد المصفوفة الملحقة $أ^{مل}$ لمصفوفة العوامل المرافقة
- نوجد المعكوس الضربي للمصفوفة أ من العلاقة : $أ^{-١} = \frac{١}{| أ |} \times أ^{مل}$

حل أنظمة المعادلات الخطية :

باعتبار أن أ هي مصفوفة المعاملات ، س هي مصفوفة المتغيرات

ب هي مصفوفة الثوابت . فإن :

- المعادلة المصفوفية تكتب بالصورة : أ س = ب
- وحل هذه المعادلة هو : س = $أ^{-١}$ × ب

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

مرتبة المصفوفة :

مرتبة المصفوفة غير الصفرية هي أعلى درجة لمحدد أو محدد أصغر للمصفوفة قيمته لا تساوي الصفر ، فإذا كانت المصفوفة أ غير الصفرية على النظام م × ن فإن مرتبة المصفوفة (أ) نرمز لها بالرمز ر (أ) حيث :

١ ≤ ر (أ) ≤ أصغر (م ، ن)

المصفوفة الموسعة : هي مصفوفة ممتدة للنظام الخطي و يرمز لها بالرمز أ* حيث :

أ* = (أ | ب) و هي على النظام م × (ن + ١)

المعادلات غير المتجانسة :

تسمى مجموعة المعادلات التي على صورة معادلة المصفوفة : أ س = ب غير متجانسة حيث ب ≠ ▭

- يكون للمجموعة المكونة من ن معادلة غير متجانسة في ن مجهولا حل وحيد إذا كانت
  ر (أ) = ر (أ*) = ن (عدد المجاهيل) حيث | أ | ≠ صفر
- يكون لمجموعة المعادلات عدد غير محدود من الحلول " عدد لا نهائي "
  إذا كان ر (أ) = ر (أ*) = ك حيث ك > ن
- و لا يكون لها حل على الاطلاق إذا كان ر (أ) ≠ ر (أ*)

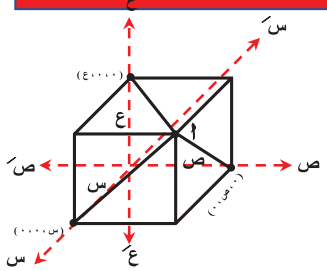
المعادلات المتجانسة :

تسمي مجموعة المعادلات التي على الصورة : أ س = ▭ بالمعادلات المتجانسة فإذا كان :

- ر (أ) = ر (أ*) = ن (عدد المجاهيل) يكون للنظام حل وحيد هو الحل الصفري (و يسمى بالحل البديهي لكونه شديد الوضوح)
- ر (أ) < ن (حيث ن عدد المجاهيل) ، | أ | = صفر فإنه يوجد حل للمجموعة عدد لانهائي من الحلول بخلاف الحل الصفري

ثانيا : الهندسة الفراغية

الوحدة الاولي : الهندسة و القياس في ثلاثة أبعاد



النظام الاحداثي المتعامد في ثلاثة أبعاد :

تتعين إحداثيات النقطة أ في الفراغ بمعرفة مسقطها على كل محور من محاور الإحداثيات

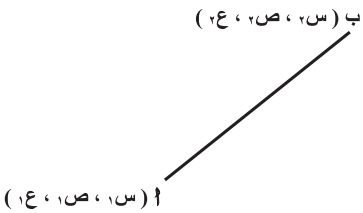
قاعدة اليد اليمنى :

و فيها تشير الأصابع المنحنية من الاتجاه الموجب لمحور س إلي الاتجاه الموجب لمحور ص و يشير اتجاه الإبهام إلي الاتجاه الموجب لمحور ع

مستويات الاحداثيات :

- المستوي س ص و معادلته ع = صفر
- المستوي س ع و معادلته ص = صفر
- المستوي ص ع و معادلته س = صفر

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK



البعد بين نقطتين في الفراغ :

إذا كانت أ (س١ ، ص١ ، ع١) ، ب (س٢ ، ص٢ ، ع٢)

نقطتين في الفراغ فإن طول القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ يعطى بالعلاقة :

$$أب = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢ + (ع_٢ - ع_١)^٢}$$

إحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة :

إذا كانت أ (س١ ، ص١ ، ع١) ، ب (س٢ ، ص٢ ، ع٢)

نقطتين في الفراغ ، جـ نقطة منتصف $\overline{أب}$ فإن احداثيات النقطة جـ هي :

$$\text{فإن } جـ \left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} ، \frac{ع_١ + ع_٢}{٢} \right)$$

معادلة الكرة في الفراغ :

- معادلة الكرة التي مركزها (ل ، ك ، ن) ، و طول نصف قطرها نـ تكون :

$$(س - ل)^٢ + (ص - ك)^٢ + (ع - ن)^٢ = نـ^٢$$

- معادلة الكرة التي مركزها نقطة الأصل ، و طول نصف قطرها نـ تكون : $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = نـ^٢$
- معادلة الكرة : $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٢ ل س + ٢ ك ص + ٢ ن ع + ء = ٠$

حيث مركزها (- ل ، - ك ، - ن) ، و طول نصف قطرها (نـ) $= \sqrt{ل^٢ + ك^٢ + ن^٢ - ء}$

حيث $ل^٢ + ك^٢ + ن^٢ > ء$

متجه الموضع في الفراغ :

إذا كانت أ ($أ_س$ ، $أ_ص$ ، $أ_ع$) نقطة في الفراغ فإن متجه الموضع

للنقطة أ بالنسبة لنقطة الأصل يكون $\overrightarrow{أ}$ = ($أ_س$ ، $أ_ص$ ، $أ_ع$)

- $أ_س$ تسمي مركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ في اتجاه محور س
- $أ_ص$ تسمي مركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ في اتجاه محور ص
- $أ_ع$ تسمي مركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ في اتجاه محور ع

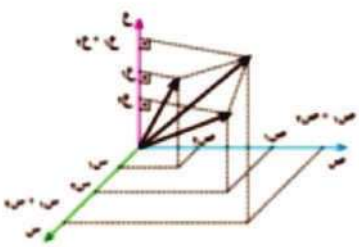
معيار المتجه :

إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = ($أ_س$ ، $أ_ص$ ، $أ_ع$) فإن $||\overrightarrow{أ}|| = \sqrt{أ_س^٢ + أ_ص^٢ + أ_ع^٢}$

جمع و طرح المتجهات في الفراغ :

إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = ($أ_س$ ، $أ_ص$ ، $أ_ع$) ، $\overrightarrow{ب}$ = ($ب_س$ ، $ب_ص$ ، $ب_ع$) فإن :

- $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}$ = ($أ_س + ب_س$ ، $أ_ص + ب_ص$ ، $أ_ع + ب_ع$)
- $\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}$ = ($أ_س - ب_س$ ، $أ_ص - ب_ص$ ، $أ_ع - ب_ع$)



موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

خواص عملية الجمع :

(١) $\vec{أ} + \vec{ب} \in ع^{٣}$ خاصية الانغلاق (٢) $\vec{أ} + \vec{ب} = \vec{ب} + \vec{أ}$ خاصية الابدال

(٣) $(\vec{أ} + \vec{ب}) + \vec{جـ} = \vec{أ} + (\vec{ب} + \vec{جـ})$ خاصية التجميع

(٤) $\vec{أ} + \vec{و} = \vec{و} + \vec{أ} = \vec{أ}$ العنصر المحايد الجمعي

(٥) $\vec{أ} + (-\vec{أ}) = (-\vec{أ}) + \vec{أ} = \vec{و}$ المعكوس الجمعي

ضرب المتجه فى عدد حقيقى :

إذا كان $\vec{أ} = (أ_{س} ، أ_{ص} ، أ_{ع})$ ، ك $\in ع$ فإن ك $\vec{أ} = (ك\, أ_{س} ، ك\, أ_{ص} ، ك\, أ_{ع})$

تساوى المتجهات فى الفراغ :

إذا كان $(أ_{س} ، أ_{ص} ، أ_{ع}) = (ب_{س} ، ب_{ص} ، ب_{ع})$

فإن : $أ_{س} = ب_{س}$ ، $أ_{ص} = ب_{ص}$ ، $أ_{ع} = ب_{ع}$

متجه الوحدة :

هو متجه معياره يساوى وحدة الأطوال

متجهات الوحدة الاساسية :

- $\vec{س} = (١ ، ٠ ، ٠)$ متجه وحدة في الاتجاه الموجب لمحور س
- $\vec{ص} = (٠ ، ١ ، ٠)$ متجه وحدة في الاتجاه الموجب لمحور ص
- $\vec{ع} = (٠ ، ٠ ، ١)$ متجه وحدة في الاتجاه الموجب لمحور ع

التعبير عن متجه بدلالة متجهات الوحدة الاساسية :

إذا كان $\vec{أ} = (أ_{س} ، أ_{ص} ، أ_{ع})$ فإنه يمكن كتابة المتجه $\vec{أ}$ على الصورة : $\vec{أ} = أ_{س}\vec{س} + أ_{ص}\vec{ص} + أ_{ع}\vec{ع}$

التعبير عن قطعة مستقيمة في الفراغ بدلالة إحداثيات طرفيها :

إذا كان أ ، ب نقطتين في الفراغ متجه موضعهما $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$

على الترتيب فإن $\overrightarrow{أ ب} = \vec{ب} - \vec{أ}$

متجه الوحدة في اتجاه معلوم :

إذا كان $\vec{أ} = (أ_{س} ، أ_{ص} ، أ_{ع})$ فإن متجه $\vec{ى_{أ}}$ يسمى متجه وحدة في اتجاه $\vec{أ}$ و يعطى بالعلاقة :

$$\vec{ى_{أ}} = \frac{\vec{أ}}{\|\vec{أ}\|}$$

زوايا الاتجاه و جيوب تمام الاتجاه المتجه فى الفراغ :

إذا كانت ($\theta_{س}$ ، $\theta_{ص}$ ، $\theta_{ع}$) قياسات الزوايا التي يصنعها المتجه $\vec{أ} = (أ_{س} ، أ_{ص} ، أ_{ع})$

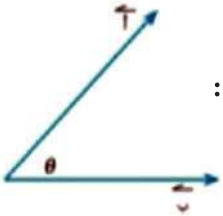
مع الاتجاهات الموجبة لمحاور س ، ص ، ع على الترتيب فإن :

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

- $أ_{س} = ||\overrightarrow{أ}|| \text{ جتا}\theta_{س}$ ، $أ_{ص} = ||\overrightarrow{أ}|| \text{ جتا}\theta_{ص}$ ، $أ_{ع} = ||\overrightarrow{أ}|| \text{ جتا}\theta_{ع}$

($\theta_{س}$ ، $\theta_{ص}$ ، $\theta_{ع}$) تسمي بزوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$

- جتا$\theta_{س}$ ، جتا$\theta_{ص}$ ، جتا$\theta_{ع}$ تسمي جيوب تمام الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$
- جتا$\theta_{س}$ $\overrightarrow{س}$ + جتا$\theta_{ص}$ $\overrightarrow{ص}$ + جتا$\theta_{ع}$ $\overrightarrow{ع}$ تمثل متجه الوحدة في اتجاه المتجه $\overrightarrow{أ}$
- و يكون : جتا$^{٢}\theta_{س}$ + جتا$^{٢}\theta_{ص}$ + جتا$^{٢}\theta_{ع}$ = ١



الضرب القياسى لمتجهين :

إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين في ع^{3} قياس الزاوية بينهما θ حيث $٠ \leq \theta \leq ١٨٠^{\circ}$ فإن :

$$\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = ||\overrightarrow{أ}|| \, ||\overrightarrow{ب}|| \text{ جتا } \theta$$

خواص الضرب القياسى لمتجهين :

(١) $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{ب} \cdot \overrightarrow{أ}$ خاصية الابدال

(٢) $\overrightarrow{أ} \cdot (\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{جـ}) = \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{جـ}$ خاصية التوزيع

(٣) إذا كان ك عدد حقيقي فإن $(ك \overrightarrow{أ}) \cdot \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{أ} \cdot (ك \overrightarrow{ب}) = ل (\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب})$

(٤) $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{أ} = ||\overrightarrow{أ}||^{٢}$

(٥) إذا كان $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}$ = صفر فإن $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$ حيث $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين غير صفريين

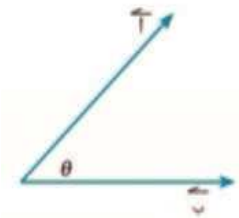
الضرب القياسى لمتجهين فى نظام احداثى متعامد :

إذا كان $\overrightarrow{أ} = (أ_{س} ، أ_{ص} ، أ_{ع})$ ، $\overrightarrow{ب} = (ب_{س} ، ب_{ص} ، ب_{ع})$

فإن : $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = أ_{س} ب_{س} + أ_{ص} ب_{ص} + أ_{ع} ب_{ع}$

الزاوية بين متجهين :

$$\therefore \text{ جتا } \theta = \frac{\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}}{||\overrightarrow{أ}|| \, ||\overrightarrow{ب}||} \quad ، \quad \text{صفر}^{\circ} \leq \theta \leq ١٨٠^{\circ}$$



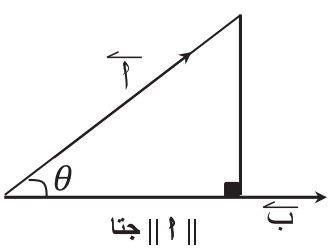
- إذا كانت جتا θ = ١ فإن $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$ و نفس الاتجاه
- إذا كانت جتا θ = − ١ فإن $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$ و في عكس الاتجاه
- إذا كانت جتا θ = صفر فإن $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$

مركبة متجه فى اتجاه متجه أخر :

∴ مركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ في اتجاه $\overrightarrow{ب}$

$$\overrightarrow{أ_{ب}} = ||\overrightarrow{أ}|| \text{ جتا } \theta$$

$$\overrightarrow{أ_{ب}} = \frac{\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}}{||\overrightarrow{ب}||}$$

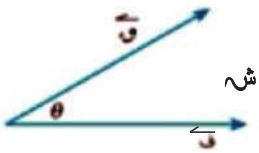


موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

المركبة الاتجاهية للمتجه $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه $\overrightarrow{ب}$:

$$= \left(\frac{\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}}{||\overrightarrow{ب}||^2} \right) \overrightarrow{ب}$$

الشغل المبذول من قوة $\overrightarrow{ق}$ لإحداث إزاحة $\overrightarrow{ف}$:



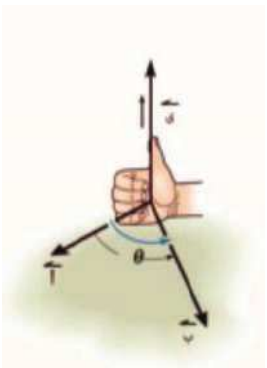
إذا أثرت قوة $\overrightarrow{ق}$ على جسم ما فحركته إزاحة $\overrightarrow{ف}$ فإننا نقول أن القوة $\overrightarrow{ق}$ قد بذلت شغلا ش

الشغل = $\overrightarrow{ق} \cdot \overrightarrow{ف}$

$= ||\overrightarrow{ق}|| \, ||\overrightarrow{ف}|| \, جتا \, \theta$

- إذا كانت القوة $\overrightarrow{ق}$ في نفس اتجاه الازاحة (θ = صفر°) ش = $||\overrightarrow{ق}|| \, ||\overrightarrow{ف}||$
- إذا كانت القوة $\overrightarrow{ق}$ في عكس اتجاه الازاحة (θ = ١٨٠°) ش = $-||\overrightarrow{ق}|| \, ||\overrightarrow{ف}||$
- إذا كانت القوة $\overrightarrow{ق}$ عمودية على اتجاه الازاحة (θ = ٩٠°) ش = صفر

الضرب الاتجاهي لمتجهين:



إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين في $ع^3$ ، قياس الزاوية بينهما يساوي θ

فإن $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = (||\overrightarrow{أ}|| \, ||\overrightarrow{ب}|| \, جا \, \theta) \overrightarrow{ى}$ حيث $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة عمودي على مستوى $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، ويتحدد اتجاه متجه الوحدة $\overrightarrow{ى}$ (لأعلى أم لأسفل) طبقا لقاعدة اليد اليمنى حيث يشير الأصابع المنحنية لليد اليمنى إلي اتجاه الدوران من $\overrightarrow{أ}$ إلي المتجه $\overrightarrow{ب}$ فيشير الابهام إلي المتجه $\overrightarrow{ى}$

خواص الضرب الاتجاهي لمتجهين :

(١) $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = -\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{أ}$

(٢) $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{و}$

(٣) $\overrightarrow{أ} \times (\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{جـ}) = \overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{جـ}$ خاصية التوزيع

(٤) إذا كان $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{و}$ فإما $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$ أو أحد المتجهين أو كليهما يساوي $\overrightarrow{و}$

(٥) $\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{ص} = \overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{ع} = \overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ع} \times \overrightarrow{س} = \overrightarrow{ص}$

$\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{ع} = -\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ع} \times \overrightarrow{ص} = -\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{س} = -\overrightarrow{ع}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

الضرب الاتجاهى لمتجهين فى نظام احداثى متعامد :

إذا كان $\vec{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ ، $\vec{ب} = (ب_س ، ب_ص ، ب_ع)$

فإن : $\vec{أ} \times \vec{ب} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ أ_س & أ_ص & أ_ع \\ ب_س & ب_ص & ب_ع \end{vmatrix}$

حالة خاصة : الضرب الاتجاهى فى مستوى الاحداثيات س ص :

إذا كان $\vec{أ} = (أ_س ، أ_ص)$ ، $\vec{ب} = (ب_س ، ب_ص)$

فإن : $\vec{أ} \times \vec{ب} = \begin{vmatrix} أ_س & أ_ص \\ ب_س & ب_ص \end{vmatrix} \vec{ع} = (أ_س ب_ص - أ_ص ب_س) \vec{ع}$

متجه الوحدة العمودى على مستوى المتجهين $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$:

$$\vec{ى} = \frac{\vec{أ} \times \vec{ب}}{\| \vec{أ} \times \vec{ب} \|}$$

توازي متجهين :

المتجهان $\vec{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ ، $\vec{ب} = (ب_س ، ب_ص ، ب_ع)$ يكونان متوازيين إذا تحقق أحد الشروط الاتية :

(١) $\vec{أ} \times \vec{ب} = \vec{و}$

(٢) $\frac{أ_س}{ب_س} = \frac{أ_ص}{ب_ص} = \frac{أ_ع}{ب_ع}$

(٣) $\vec{أ} = ك \vec{ب}$ إذا كانت ك > ٠ فإن المتجهين $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ متوازيان و في نفس الاتجاه

، إذا كانت ك < ٠ فإن المتجهين $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ متوازيان و في عكس الاتجاه

المعنى الهندسى للضرب الاتجاهى :

$\| \vec{أ} \times \vec{ب} \|$ = مساحة متوازي الاضلاع الذي فيه $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ ضلعان متجاوران

= ضعف مساحة المثلث الذي فيه $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ ضلعان متجاوران

الضرب الثلاثى القياسى :

$$\vec{أ} . \vec{ب} \times \vec{جـ} = \begin{vmatrix} أ_س & أ_ص & أ_ع \\ ب_س & ب_ص & ب_ع \\ جـ_س & جـ_ص & جـ_ع \end{vmatrix}$$

المعنى الهندسى للضرب الثلاثى القياسى :

حجم متوازي السطوح الذي فيه $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ ، $\vec{جـ}$ ثلاثة متجهات تمثل أحرف غير متوازية

يساوي القيمة المطلقة للمقدار : $\vec{أ} . \vec{ب} \times \vec{جـ}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

الوحدة الثانية : الخطوط المستقيمة و المستويات في الفراغ

متجه الاتجاه :

- إذا كانت ل ، م ، ن هي جيوب تمام الاتجاه لمستقيم فإن المتجه $\overrightarrow{ه}$ = ك (ل ، م ، ن) يمثل متجه اتجاه للمستقيم و يرمز له بالرمز $\overrightarrow{ه}$ = (أ ، ب ، جـ) و تسمى الأعداد أ ، ب ، جـ بنسب الاتجاه للمستقيم
- متجه الاتجاه للمستقيم يأخذ عدة صور متكافئة فمثلا :

$\overrightarrow{ه}$ = ٢ (ل ، م ، ن) = ٣ (ل ، م ، ن) = − ٤ (ل ، م ، ن) =.....

معادلة الخط المستقيم :

- معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (س١ ، ص١ ، ع١) و المتجه $\overrightarrow{ه}$ = (أ ، ب ، جـ) متجه اتجاه له هي الصورة المتجهة : $\overrightarrow{ر}$ = (س١ ، ص١ ، ع١) + ك (أ ، ب ، جـ)
- المعادلات البارمترية : س = س١ + ك أ ، ص = ص١ + ك ب ، ع = ع١ + ك جـ
- المعادلة الاحداثية : $\frac{\text{س} - \text{س}_1}{\text{أ}} = \frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{ب}} = \frac{\text{ع} - \text{ع}_1}{\text{جـ}}$

الزاوية بين مستقيمين :

إذا كان $\overrightarrow{ه}_1$ ، $\overrightarrow{ه}_2$ متجهي اتجاه مستقيمين فإن قياس الزاوية الصغرى بين المستقيمين يعطي بالعلاقة :

$$\text{جتا}\theta = \frac{|\overrightarrow{ه}_1 \cdot \overrightarrow{ه}_2|}{\|\overrightarrow{ه}_1\| \, \|\overrightarrow{ه}_2\|}$$

و إذا كان (ل١ ، م١ ، ن١) ، (ل٢ ، م٢ ، ن٢) هي جيوب تمام الاتجاه للمستقيمين فإن :

$$\text{جتا}\theta = |\, \text{ل}_1 \text{ل}_2 + \text{م}_1 \text{م}_2 + \text{ن}_1 \text{ن}_2 \,|$$

شرط توازي و شرط تعامد مستقيمين :

إذا كان $\overrightarrow{ه}_1$ = (أ١ ، ب١ ، جـ١) ، $\overrightarrow{ه}_2$ = (أ٢ ، ب٢ ، جـ٢) متجهي اتجاه مستقيمين فإن :

- المستقيمين متوازيان إذا كان :

$\overrightarrow{ه}_1 = \text{ك} \overrightarrow{ه}_2$ أى، $\overrightarrow{ه}_1 \times \overrightarrow{ه}_2 = \overrightarrow{و}$ أى، $\frac{\text{أ}_1}{\text{أ}_2} = \frac{\text{ب}_1}{\text{ب}_2} = \frac{\text{جـ}_1}{\text{جـ}_2}$

- المستقيمين متعامدان إذا كان :

أ١ أ٢ + ب١ ب٢ + جـ١ جـ٢ = صفر

معادلة المستوى :

معادلة المستوي المار بالنقطة (س١ ، ص١ ، ع١) و المتجه $\overrightarrow{ن}$ = (أ ، ب ، جـ) عموديا على المستوي هي :

- الصورة المتجهة : $\overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} \cdot$ (س١ ، ص١ ، ع١)
- الصورة القياسية : أ (س − س١) + ب (ص − ص١) + جـ (ع − ع١) = صفر
- الصورة العامة : أ س + ب ص + جـ ع + ء = صفر ، حيث ء = − أ س١ − ب ص١ − جـ ع١

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

الزاوية بين مستويين :

إذا كان $\vec{ن}_1 = (أ_1 ، ب_1 ، جـ_1)$ ، $\vec{ن}_2 = (أ_2 ، ب_2 ، جـ_2)$ متجهي العمودين على المستويين فإن قياس الزاوية بين المستويين تعطي بالعلاقة :

$$\text{جتا}\theta = \frac{|\vec{ن}_1 . \vec{ن}_2|}{||\vec{ن}_1|| \, ||\vec{ن}_2||} \qquad \text{حيث } ٠^\circ \leq \theta \leq ٩٠^\circ$$

المستويان المتوازيان و المستويان المتعامدان :

إذا كان $\vec{ن}_1$ ، $\vec{ن}_2$ هما المتجهان العموديان على المستويين فإن :

- شرط توازي المستويين هو : $\vec{ن}_1 // \vec{ن}_2$ أى، $\frac{أ_1}{أ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} = \frac{جـ_1}{جـ_2}$
- شرط تعامد المستويين هو : $\vec{ن}_1 . \vec{ن}_2 = ٠$ أى، $أ_1 أ_2 + ب_1 ب_2 + جـ_1 جـ_2 = \text{صفر}$

طول العمود المرسوم من نقطة على المستوى :

طول العمود المرسوم من النقطة أ (س١ ، ص١ ، ع١) على المستوي المار بالنقطة ب (س٢ ، ص٢ ، ع٢) و المتجه $\vec{ن} = (أ ، ب ، جـ)$ عمودي على المستوي هو ل حيث:

$$ل = \frac{|\overrightarrow{ب أ} . \vec{ن}|}{||\vec{ن}||}$$

طول العمود المرسوم من النقطة أ (س١ ، ص١ ، ع١) على المستوي الذي معادلته:

أ س + ب ص + جـ ع + ء = صفر هو ل حيث:

$$ل = \frac{|أس_1 + ب ص_1 + جـ ع_1 + ء|}{\sqrt{أ^2 + ب^2 + جـ^2}}$$

معادلة المستوي باستخدام الأجزاء المقطوعة من محاور الاحداثيات :

إذا قطع المستوي محاور الاحداثيات في النقط : (س١ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، ص١ ، ٠) ، (٠ ، ٠ ، ع١) فإن معادلة المستوي تكون على الصورة :

$$\frac{س}{س_1} + \frac{ص}{ص_1} + \frac{ع}{ع_1} = ١$$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

موقع الدكتور
محمد رزق
التعليمي

امسح الباركود بالموبيل لتثبيت
التطبيق وتحميل كل الملازم مجانا وبسرعه

MR

حمل التطبيق الأن

GET IT ON
Google Play

ملازم ابتدائي | ملازم اعدادي | ملازم ثانـــوي | كورسات ونتائج امتحانات

موقع الدكتور محمد رزق
Dr.MoRizK